

7.1. Как показывает эксперимент, время горения свечей из одинакового вещества и с одинаковым типом фитиля пропорционально объему свечи. Для отсчета времени на свечу наносят горизонтальные деления, соответствующие некоторым промежуткам времени.

А) Цилиндрическая свеча объемом высотой $H = 48$ см и диаметром $D = 8$ см горит в течение времени $T = 12$ часов. Сколько времени T_1 (в минутах) будет гореть свеча, все линейные размеры которой (диаметр и высота) в 2 раза меньше, чем у данной свечи?

Б) Во сколько раз изменится расстояние между делениями, соответствующими времени горения $\tau = 15$ минут?

Примечание: площадь круга S вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.

Решение.

А) Объем цилиндра: $V = \frac{\pi}{4} D^2 H$. Если диаметр и высоту свечи уменьшить в 2 раза, то объем свечи и время её горения уменьшатся в 8 раз. Следовательно, уменьшенная свеча горит 1,5 часа = 90 минут.

Б) У первой свечи расстояние между делениями 15 минут равно

$$H \cdot \frac{\tau}{T} = 48 \text{ см} \cdot \frac{1/4 \text{ ч}}{12 \text{ ч}} = 1 \text{ см}.$$

Для второй свечи:

$$\frac{H}{2} \cdot \frac{\tau}{T/8} = 24 \text{ см} \cdot \frac{1/4 \text{ ч}}{3/2 \text{ ч}} = \frac{24 \text{ см}}{6} = 4 \text{ см}.$$

Таким образом, расстояние между 15-минутными делениями увеличится в 4 раза.

Примечание

При решении п. А может использоваться коэффициент подобия: $V \propto a^3$, где a – линейные размеры тела.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула для объема цилиндра или формула для коэффициента подобия.	2
2	Получен вывод, что объем и время горения уменьшатся в 8 раз.	1
3	Посчитано время горения 1,5 ч = 90 мин.	1
4	Приведена формула для расчета расстояния между делениями времени на свечах	2
5	Посчитано численно расстояние между 15-минутными делениями на первой свече	1
6	Посчитано численно расстояние между 15-минутными делениями на второй (уменьшенной) свече	1
7	Получен вывод, что расстояние увеличится в 4 раза.	2
	Сумма	10

7.2. Школьник скачивает из сети Интернет 3 видеофайла. Известно, что I и II файлы вместе он скачивает за время $t_1 = 2000$ с, II и III вместе – за $t_2 = 2800$ с, I и III вместе – за $t_3 = 2400$ с. Общий размер файлов $S = 45$ гигабайт.

А) За какое время (в минутах) школьник скачает все три файла вместе?

Б) Какая скорость скачивания (в мегабитах в секунду)?

В) Каков размер (в гигабайтах) III файла?

Примечание: 1 байт = 8 бит, 1 мегабайт = 2^{20} байт $\approx 10^6$ байт, 1 гигабайт = 2^{30} байт $\approx 10^9$ байт.

Решение.

А) Пусть S_1, S_2, S_3 – размер каждого из файлов, v – скорость скачивания.

$$t_1 = \frac{S_1 + S_2}{v}; \quad (1)$$

$$t_2 = \frac{S_2 + S_3}{v}; \quad (2)$$

$$t_3 = \frac{S_1 + S_3}{v}. \quad (3)$$

Время скачивания 3 файлов вместе:

$$t = \frac{S}{v} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{v}. \quad (4)$$

Для решения системы уравнений (1)-(3) сложим их:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S_1 + S_2}{v} + \frac{S_2 + S_3}{v} + \frac{S_1 + S_3}{v} = 2 \frac{S_1 + S_2 + S_3}{v} = 2t. \quad (5)$$

Отсюда

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3) = 3600 \text{ с} = 60 \text{ мин.} \quad (6)$$

Б) Для определения скорости скачивания разделим общий размер файлов на время скачивания:

$$v = \frac{S}{t} \approx \frac{45000 \text{ мегабайт} \cdot 8 \text{ бит} / \text{байт}}{3600 \text{ с}} = 100 \text{ мегабит/с.} \quad (7)$$

В) Вычтем из уравнения (4) уравнение (1):

$$t - t_1 = \frac{S_3}{v}. \quad (8)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} S_3 &= v(t - t_1) = 100 \text{ мегабит} / \text{с} \cdot 1600 \text{ с} = 160000 \text{ мегабит} = \\ &= 20000 \text{ мегабайт} = 20 \text{ гигабайт} \end{aligned} \quad (9)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана система уравнений (1)-(4)	2
2	Получено выражение (6) для времени t	1
3	Получено численное значение $t = 60$ мин. Примечание: при ответе 3600 с или 1 час ставим 0,5 балла	1
4	Получено выражение (7) для скорости скачивания v	1
5	Получено численное значение $v = 100$ мегабит/с Примечание: при другой размерности ставим 0,5 балла	2
6	Получено выражение (9) для размера файла S_3 .	1
7	Получено численное значение $S_3 = 20$ гигабайт. Примечание: при другой размерности ставим 0,5 балла	2
	Сумма	10

7.3. В кубический аквариум с длиной ребер D , доверху наполненный водой, медленно опустили на дно шар диаметром D , в результате чего часть воды вылилась. После этого шар вынимают, и опускают новый шар диаметром $d = D/2$. Чему равно расстояние x от дна аквариума до поверхности воды в нем после опускания второго шара? Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.

Решение.

Объем воды в аквариуме, доверху заполненного водой:

$$V_0 = D^3. \quad (1)$$

Объем первого шара:

$$V_D = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}D^3. \quad (2)$$

При погружении шара в аквариум выливается объем воды, равный объему шара. Останется воды:

$$V_1 = V_0 - V_D = D^3 - \frac{\pi}{6}D^3 = D^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right). \quad (3)$$

Объем второго (маленького) шара:

$$V_d = \frac{\pi}{6}d^3. \quad (4)$$

Допустим, что второй шар полностью скрыт под водой. Тогда суммарный объем воды и второго шара:

$$V_2 = V_1 + V_d = D^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}d^3. \quad (5)$$

С другой стороны,

$$V_2 = D^2x, \quad (6)$$

где x – искомый уровень воды. Приравнивая выражения (5) и (6), получаем:

$$D^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}d^3 = D^2x;$$

$$x = D \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \frac{d^3}{D^2}. \quad (7)$$

Подставляя $d = D/2$, получаем:

$$x = D \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{D}{8} = D \frac{48 - 7\pi}{48} \approx 0,542 \cdot D. \quad (8)$$

Поскольку $x > d$, то предположение о том, что второй шар скрыт под водой, справедливо.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для объема воды в аквариуме	1
2	Записана формула (2) для объема первого шара через его диаметр	1
3	Найден объем оставшейся воды (3)	1
4	Записана формула (4) для объема второго шара через его диаметр	1
5	Записано и проверено предположение, что второй шар полностью скрыт под водой	2
6	Записан суммарный объем воды и второго шара (5)	1
7	Записано выражение (6) для объема воды и шара через уровень жидкости	1
8	Получен ответ $x \approx 0,542 \cdot D$.	2
	Сумма	10

7.4. Чёрная дыра – это область пространства, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть её не могут даже кванты света. По одной из моделей, радиус черной дыры задается формулой:

$$R_g = \frac{2G}{c^2} M,$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1}$ – гравитационная постоянная, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме, M – масса черной дыры. Объем шара: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Определите, во сколько раз средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ вещества внутри сверхмассивной черной дыры Лебедь А, масса которой в 1 миллиард раз больше массы Солнца, отличается от плотности жидкой воды $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$? Масса Солнца $M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$.

Решение.

Рассмотрим черную дыру как шар радиуса R_g . Тогда ее средняя плотность равна:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R_g^3} = \frac{3M}{4\pi \left(\frac{c^2}{2GM} \right)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2} = \frac{\alpha}{M^2}, \quad (1)$$

где $\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3$ – размерная константа.

Найдем массу черной дыры Лебедь А:

$$M = 10^9 \cdot M_{\text{С}} = 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{39} \text{ кг}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\rho_{\text{ср}} = 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3 / (2 \cdot 10^{39} \text{ кг})^2 \approx 18,3 \text{ кг/м}^3. \quad (3)$$

Следовательно, плотность воды *больше* средней плотности черной дыры в $1000 \text{ кг/м}^3 / 18,3 \text{ кг/м}^3 \approx 54,8$ раза.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Получена зависимость (1) для средней плотности черной дыры от её массы	2
2	Явно или неявно вычислен размерный коэффициент $\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3$	3
3	Найдена масса черной дыры $2 \cdot 10^{39} \text{ кг}$	1
4	Найдено числовое значение для плотности черной дыры $18,3 \text{ кг/м}^3$. Допустимы значения порядка 18-20 кг/м^3 .	2
5	Получен вывод, что плотность воды больше средней плотности сверхмассивных черных дыр	1
6	Получено численное значение отношения 54,8 (допустимо 50-60).	1
	Сумма	10

8.1. На гоночном треке в виде большой окружности боксы команд А и В расположены в диаметрально противоположных точках трека. Из боксов по треку навстречу друг другу выезжают две машины, причем каждая движется по треку с постоянной скоростью. Первая их встреча произошла на расстоянии $L_1 = 300$ м от бокса команды А (расстояние измеряется по трассе трека). Проехав мимо друг друга, они продолжают движение, и следующая их встреча состоялась на расстоянии $L_2 = 180$ м от бокса команды В. Определите возможную длину трека L .

Решение.

Вариант 1.

Заметим, что от начала движения к моменту первой встречи обе машины суммарно прошли расстояние $L/2$, а ко второй – $3L/2$. Поскольку промежутки времени одинаковы для обеих машин, то каждая из них к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{L}{2} + L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2} + L_2 = 3L_1; \quad (1)$$

$$L = 2(3L_1 - L_2). \quad (2)$$

Возможная длина трека – 1440 м.

Б) Если скорость машины из бокса В значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды В и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{L}{2} - L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2} - L_2 = 3L_1; \quad (3)$$

$$L = 2(3L_1 + L_2). \quad (4)$$

Возможная длина трека – 2160 м.

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса В, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{3L}{2} - L_2$. Отсюда:

$$\frac{3L}{2} - L_2 = 3L_1; \quad (5)$$

$$L = \frac{2}{3}(3L_1 + L_2) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2. \quad (6)$$

Возможная длина трека – 720 м.

Примечание: распространенная ошибка – расстояние L до момента второй встречи.

Разбалловка варианта 1

№	Критерий	Баллы
1	Определено суммарное расстояние $L/2$ до 1-й встречи.	1
2	Определено суммарное расстояние $3L/2$ до 2-й встречи При значении L за этот пункт и за числовой ответ для длин трека (п. 6, 8, 10) ставим 0 баллов, за остальные пункты при правильной логике решения баллы не снимаем (итого 6 баллов за задачу).	1
3	Получен вывод, что каждая из машин к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.	1
4	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
5	Рассмотрен случай (А)	1
6	Получена длина трека 1440 м	1
7	Рассмотрен случай (Б)	1
8	Получена длина трека 2160 м	1
9	Рассмотрен случай (В)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	10

Вариант 2.

Пусть v_1 – скорость первой машины из бокса команды А, v_2 – скорость второй машины из бокса команды В, τ_1 – время от начала движения до первой встречи, τ_2 – до второй встречи.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Для первой встречи:

$$L_1 = v_1 \tau_1; \quad (1a)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = v_2 \tau_1; \quad (2a)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} + L_2 = v_1 \tau_2; \quad (3a)$$

$$L - L_2 = v_2 \tau_2. \quad (4a)$$

Сложим уравнения (1a) и (2a):

$$\frac{L}{2} = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_1 = (v_1 + v_2) \tau_1. \quad (5a)$$

Сложим уравнения (3a) и (4a):

$$\frac{3L}{2} = v_1 \tau_2 + v_2 \tau_2 = (v_1 + v_2) \tau_2. \quad (6a)$$

Отсюда, разделив (6а) на (5а):

$$\tau_2 = 3\tau_1. \quad (7a)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3а) на уравнение (1а):

$$\frac{\frac{L}{2} + L_2}{L_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3. \quad (8a)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 - L_2) = 1440 \text{ м.} \quad (9a)$$

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Тогда для первой встречи:

$$L_1 = v_1 \tau_1; \quad (1б)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = v_2 \tau_1; \quad (2б)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} - L_2 = v_1 \tau_2; \quad (3б)$$

$$L + L_2 = v_2 \tau_2. \quad (4б)$$

Сложим уравнения (1б) и (2б):

$$\frac{L}{2} = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_1 = (v_1 + v_2) \tau_1. \quad (5б)$$

Сложим уравнения (3б) и (4б):

$$\frac{3L}{2} = v_1 \tau_2 + v_2 \tau_2 = (v_1 + v_2) \tau_2. \quad (6б)$$

Отсюда, разделив (6б) на (5б):

$$\tau_2 = 3\tau_1. \quad (7б)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3б) на уравнение (1б):

$$\frac{\frac{L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3. \quad (8б)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 + L_2) = 2160 \text{ м.} \quad (9б)$$

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Тогда для первой встречи:

$$L_1 = v_1 \tau_1; \quad (1в)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = v_2 \tau_1; \quad (2в)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{3L}{2} - L_2 = v_1 \tau_2; \quad (3в)$$

$$L_2 = v_2 \tau_2. \quad (4в)$$

Сложим уравнения (1в) и (2в):

$$\frac{L}{2} = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_1 = (v_1 + v_2) \tau_1. \quad (5в)$$

Сложим уравнения (3в) и (4в):

$$\frac{3L}{2} = v_1 \tau_2 + v_2 \tau_2 = (v_1 + v_2) \tau_2. \quad (6в)$$

Отсюда, разделив (6в) на (5в):

$$\tau_2 = 3\tau_1. \quad (7в)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3в) на уравнение (1в):

$$\frac{\frac{L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3. \quad (8в)$$

Отсюда

$$L = \frac{2}{3}(3L_1 + L_2) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2 = 720 \text{ м.} \quad (9в)$$

Разбалловка варианта 2

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
2	Для случая (А) записаны уравнения (1а)-(4а)	1
3	Записано уравнение (8а)	1
4	Получена длина трека 1440 м	1
5	Для случая (Б) записаны уравнения (1б)-(4б)	1
6	Записано уравнение (8б)	1
7	Получена длина трека 2160 м	1
8	Для случая (В) записаны уравнения (1в)-(4в)	1
9	Записано уравнение (8в)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	10

8.2. Однородный брусок в виде параллелепипеда из материала с плотностью ρ и размерами $a \times b \times b$ ($b < a$) стоит квадратной гранью на дне большого аквариума, в который до уровня h налита вода ($h < a$, $\rho_в < \rho$, где $\rho_в$ – плотность воды). Какую минимальную силу надо приложить к бруску, чтобы он начал наклоняться, вращаясь относительно нижнего ребра? Брусок по дну аквариума не скользит. Ускорение свободного падения равно g .

Решение.

Искомая сила будет минимальной, если приложить ее **перпендикулярно** плечу максимально возможной длины, которым в данном случае является диагональ боковой грани бруска.

В начальной стадии вращения (как только нижняя грань оторвалась от дна аквариума) на брусок действуют следующие силы:

- приложенная перпендикулярно к верхнему ребру и диагонали грани $a \times b$ искомая сила F ;

- приложенная к центру масс сила тяжести mg ;

- приложенная к центру плавания сила Архимеда F_A ;

- приложенная к нижнему ребру вертикально вверх сила реакции опоры N .

Запишем уравнение моментов сил относительно точки опоры (тогда момент силы реакции опоры равен 0):

$$F \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = mg \cdot \frac{b}{2} - F_A \cdot \frac{b}{2}. \quad (1)$$

Сила Архимеда равна:

$$F_A = \rho_в g \cdot V_{погр} = \rho_в g \cdot hb^2. \quad (2)$$

Масса бруска равна:

$$m = \rho V = \rho a \cdot b^2. \quad (3)$$

Отсюда получаем:

$$F = \frac{gb^3(\rho a - \rho_в h)}{2\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Примечание:

Если школьник направляет силу F параллельно верхней грани бруска, уравнение моментов силы будет выглядеть как:

$$F \cdot a = mg \cdot \frac{b}{2} - F_A \cdot \frac{b}{2}. \quad (1)$$

Получаемый ответ:

$$F = \frac{gb^3(\rho a - \rho_в h)}{2a}. \quad (4)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Обоснована минимальность прилагаемой силы (перпендикулярно диагонали грани). При обосновании направления силы параллельно верхней грани за этот пункт ставим 0 баллов, за остальные пункты (при правильном решении) баллы не снимаем.	3

2	Записано уравнение моментов сил (1), с правильным указанием точек приложения сил.	3
3	Записано выражение (2) для силы Архимеда	1
4	Записано выражение (3) для массы бруска (или для силы тяжести бруска)	1
5	Получен ответ (4)	2
	Сумма	10

8.3. Средняя плотность свинцового шара и железного куба равна $\rho_1 = 8,9 \text{ г/см}^3$. Чему будет равна средняя плотность ρ_2 железного шара и свинцового куба тех же размеров? Чему равно отношение объемов шара и куба? Плотность свинца $\rho_c = 11,4 \text{ г/см}^3$, плотность железа $\rho_{ж} = 7,8 \text{ г/см}^3$.

Решение.

Пусть V_1 и V_2 – объемы шара и куба соответственно.

Обозначим $\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$, тогда $1 - \alpha = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$.

Средняя плотность свинцового шара и железного куба:

$$\rho_1 = \frac{\rho_c V_1 + \rho_{ж} V_2}{V_1 + V_2} = \alpha \rho_c + (1 - \alpha) \rho_{ж}. \quad (1)$$

Раскроем скобки:

$$\rho_1 = \alpha(\rho_c - \rho_{ж}) + \rho_{ж}. \quad (2)$$

Отсюда:

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}. \quad (3)$$

Средняя плотность свинцового куба и железного шара:

$$\rho_2 = \frac{\rho_{ж} V_1 + \rho_c V_2}{V_1 + V_2} = \alpha \rho_{ж} + (1 - \alpha) \rho_c = -\alpha(\rho_c - \rho_{ж}) + \rho_c. \quad (4)$$

Сложим уравнения (2) и (4):

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_{ж} + \rho_c;$$

$$\rho_2 = \rho_{ж} + \rho_c - \rho_1 = 7,8 + 11,4 - 8,9 = 10,3 \text{ г/см}^3. \quad (5)$$

Отношение объемов:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\rho_c - \rho_{ж}}{1 - \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}} = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж} - (\rho_1 - \rho_{ж})} = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_1} = \frac{8,9 - 7,8}{11,4 - 8,9} = 0,44 \quad (6)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для средней плотности ρ_1	1
2	Записано выражение (3) для доли объема одной из фигур, или найдены объемы фигур.	3
3	Записано уравнение (4) для средней плотности ρ_2	1
4	Получено выражение (5) для средней плотности ρ_2	1
5	Получен ответ $\rho_2 = 10,3 \text{ г/см}^3$.	1
6	Получено выражение (6) для отношения объемов шара и куба	1
7	Получено значение 0,44 для отношения объемов шара и куба	1
	Сумма	10

8.4. Реактором идеального смешения называется закрытый сосуд с несколькими входными и одним выходным потоком, в котором происходит быстрое перемешивание вещества с достижением одинаковых значений давления и температуры в каждой точке объема сосуда. В такой реактор поступает 2 входных потока воды, с массовым расходом μ_1 и μ_2 , и температурой T_1 и T_2 соответственно. Какая равновесная температура T_x установится внутри реактора, если дополнительно внутри сосуда выделяется тепло мощностью P ? Удельная теплоемкость воды c . Количество воды в реакторе остается постоянным. *Примечание:* массовым расходом называется масса вещества, поступающего в поток в реактор в единицу времени.

Решение.

Поскольку вода не сжимается и её количество внутри реактора остается постоянным, то массовый расход вытекающей из реактора воды равен сумме массовых расходов втекающих потоков (аналог закона сохранения массы):

$$\mu_{\text{вых}} = \mu_1 + \mu_2. \quad (1)$$

В равновесии температура вытекающего потока равна температуре воды внутри реактора:

$$T_{\text{вых}} = T_x. \quad (2)$$

Тепловая энергия, которая поступает в реактор за малый промежуток времени $\Delta \tau$:

$$Q_{\text{вх}} = (c\mu_1 T_1 + c\mu_2 T_2) \cdot \Delta \tau. \quad (3)$$

Тепловая энергия, которая выделяется внутри реактора:

$$Q_{\text{выд}} = P \cdot \Delta \tau. \quad (4)$$

Тепловая энергия, которая уходит из реактора:

$$Q_{\text{вых}} = c\mu_{\text{вых}} T_{\text{вых}} \cdot \Delta \tau = c(\mu_1 + \mu_2) T_x \cdot \Delta \tau. \quad (5)$$

В равновесии сохраняется тепловой баланс:

$$Q_{\text{вх}} + Q_{\text{выд}} = Q_{\text{вых}}; \quad (6)$$

$$(c\mu_1 T_1 + c\mu_2 T_2) \cdot \Delta \tau + P \cdot \Delta \tau = c(\mu_1 + \mu_2) T_x \cdot \Delta \tau;$$

Отсюда получаем:

$$T_x = \frac{\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + \frac{P}{c}}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (7)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Отмечено, что массовый расход вытекающей из реактора воды равен сумме массовых расходов втекающих потоков	2
2	Отмечено, что в равновесии температура вытекающего потока равна температуре воды в реакторе.	2
3	Записаны уравнения (3)-(5) для тепловой энергии входного потока, выделяющейся в реакторе и выходного потока (возможно, в одном уравнении)	3
4	Записано уравнение (6) для теплового баланса	2

5	Получен ответ (7)	1
	Сумма	10

9.1. На гоночном треке в виде большой окружности боксы команд А и В расположены в диаметрально противоположных точках трека. Из боксов по треку навстречу друг другу выезжают две машины, причем каждая движется по треку с линейно увеличивающейся со временем скоростью (начальная скорость равна 0). Первая их встреча произошла на расстоянии $L_1 = 300$ м от бокса команды А (расстояние измеряется по трассе трека). Проехав мимо друг друга, они продолжают движение, и следующая их встреча состоялась на расстоянии $L_2 = 180$ м от бокса команды В. Определите возможную длину трека L .

Решение.

Вариант 1.

Заметим, что от начала движения к моменту первой встречи обе машины суммарно прошли расстояние $L/2$, а ко второй – $3L/2$. Поскольку промежутки времени одинаковы для обеих машин, то каждая из них к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{L}{2} + L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2} + L_2 = 3L_1; \quad (1)$$

$$L = 2(3L_1 - L_2). \quad (2)$$

Возможная длина трека – 1440 м.

Б) Если скорость машины из бокса В значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды В и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{L}{2} - L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2} - L_2 = 3L_1; \quad (3)$$

$$L = 2(3L_1 + L_2). \quad (4)$$

Возможная длина трека – 2160 м.

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса В, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{3L}{2} - L_2$. Отсюда:

$$\frac{3L}{2} - L_2 = 3L_1; \quad (5)$$

$$L = \frac{2}{3}(3L_1 + L_2) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2. \quad (6)$$

Возможная длина трека – 720 м.

Примечание: распространенная ошибка – расстояние L до момента второй встречи.

Разбалловка варианта 1

№	Критерий	Баллы
1	Определено суммарное расстояние $L/2$ до 1-й встречи.	1
2	Определено суммарное расстояние $3L/2$ до 2-й встречи При значении L за этот пункт и за числовой ответ для длин трека (п. 6, 8, 10) ставим 0 баллов, за остальные пункты при правильной логике решения баллы не снимаем (итого 6 баллов за задачу).	1
3	Получен вывод, что каждая из машин к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.	1
4	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
5	Рассмотрен случай (А)	1
6	Получена длина трека 1440 м	1
7	Рассмотрен случай (Б)	1
8	Получена длина трека 2160 м	1
9	Рассмотрен случай (В)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	10

Вариант 2.

Пусть a_1 – ускорение первой машины из бокса команды А, a_2 – ускорение второй машины из бокса команды В, τ_1 – время от начала движения первой встречи, τ_2 – до второй встречи.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Тогда для первой встречи:

$$L_1 = \frac{a_1 \tau_1^2}{2}; \quad (1a)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{a_2 \tau_1^2}{2}; \quad (2a)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} + L_2 = \frac{a_1 \tau_2^2}{2}; \quad (3a)$$

$$L - L_2 = \frac{a_2 \tau_2^2}{2}. \quad (4a)$$

Сложим уравнения (1а) и (2а):

$$\frac{L}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} + \frac{a_2 \tau_1^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_1^2. \quad (5a)$$

Сложим уравнения (3а) и (4а):

$$\frac{3L}{2} = \frac{a_1 \tau_2^2}{2} + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_2^2. \quad (6a)$$

Отсюда, разделив (6а) на (5а):

$$\tau_2^2 = 3\tau_1^2, \text{ или } \tau_2 = \sqrt{3}\tau_1. \quad (7a)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3а) на уравнение (1а):

$$\frac{\frac{L}{2} + L_2}{L_1} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = 3. \quad (8a)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 - L_2) = 1440 \text{ м.} \quad (9a)$$

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Тогда первой встречи:

$$L_1 = \frac{a_1 \tau_1^2}{2}; \quad (1б)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{a_2 \tau_1^2}{2}; \quad (2б)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} - L_2 = \frac{a_1 \tau_2^2}{2}; \quad (3б)$$

$$L + L_2 = \frac{a_2 \tau_2^2}{2}. \quad (4б)$$

Сложим уравнения (1б) и (2б):

$$\frac{L}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} + \frac{a_2 \tau_1^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_1^2. \quad (5б)$$

Сложим уравнения (3б) и (4б):

$$\frac{3L}{2} = \frac{a_1 \tau_2^2}{2} + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_2^2. \quad (6б)$$

Отсюда, разделив (6б) на (5б):

$$\tau_2^2 = 3\tau_1^2, \text{ или } \tau_2 = \sqrt{3}\tau_1. \quad (7б)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3б) на уравнение (1б):

$$\frac{\frac{L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = 3. \quad (8б)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 + L_2) = 2160 \text{ м.} \quad (9б)$$

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Тогда первой встречи:

$$L_1 = \frac{a_1 \tau_1^2}{2}; \quad (1в)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{a_2 \tau_1^2}{2}; \quad (2в)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{3L}{2} - L_2 = \frac{a_1 \tau_2^2}{2}; \quad (3в)$$

$$L_2 = \frac{a_2 \tau_2^2}{2}. \quad (4в)$$

Сложим уравнения (1в) и (2в):

$$\frac{L}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} + \frac{a_2 \tau_1^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_1^2. \quad (5в)$$

Сложим уравнения (3в) и (4в):

$$\frac{3L}{2} = \frac{a_1 \tau_2^2}{2} + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_2^2. \quad (6в)$$

Отсюда, разделив (6в) на (5в):

$$\tau_2^2 = 3\tau_1^2, \text{ или } \tau_2 = \sqrt{3}\tau_1. \quad (7в)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3в) на уравнение (1в):

$$\frac{\frac{3L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = 3. \quad (8в)$$

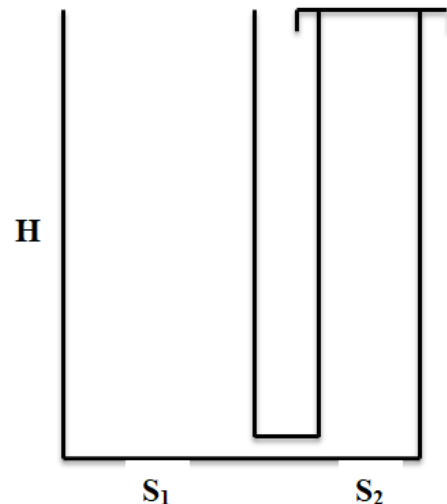
Отсюда

$$L = \frac{2}{3}(3L_1 + L_2) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2 = 720 \text{ м.} \quad (9в)$$

Разбалловка варианта 2

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
2	Для случая (А) записаны уравнения (1а)-(4а)	1
3	Записано уравнение (8а)	1
4	Получена длина трека 1440 м	1
5	Для случая (Б) записаны уравнения (1б)-(4б)	1
6	Записано уравнение (8б)	1
7	Получена длина трека 2160 м	1
8	Для случая (В) записаны уравнения (1в)-(4в)	1
9	Записано уравнение (8в)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	10

9.2. Два вертикальных цилиндрических сосуда №1 и №2 некоторой высоты H , стоящих на горизонтальной поверхности, доверху заполнены ртутью (плотностью $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$) и соединены внизу тонкой горизонтальной трубкой пренебрежимо малого объема (см. рисунок). Площади поперечного сечения сосудов №1 и №2 равны S_1 и S_2 соответственно. Толщиной стенок сосудов можно пренебречь.



Сосуд №2 сверху герметизируют крышкой (воздуха между ртутью и крышкой нет). Из сосуда №1 откачали ртуть объемом V . Какими станут уровни ртути в сосудах №1 и №2? При каких высотах H в сосуде №2 над жидкостью появится пустота? Атмосферное давление $p_A \approx 10^5 \text{ Па}$. Ускорение свободного падения g .

Решение.

В начале откачки уровень ртути будет понижаться только в сосуде №1, поскольку в сосуде №2 при опускании уровня жидкости возникнет разреженность, и атмосферное давление поднимет жидкость обратно. Таким образом, при откачивании объема V уровень в сосуде №1 снизится на

$$\Delta h_1 = \frac{V}{S_1}, \quad (1)$$

$$h_1 = H - \Delta h_1 = H - \frac{V}{S_1}. \quad (2)$$

$$\text{А в сосуде №2 } \Delta h_2 = 0 \text{ и } h_2 = H. \quad (3)$$

Это будет продолжаться, пока гидростатическое давление, обусловленное разностью высот уровней, не станет равным атмосферному давлению p_A . Это произойдет в момент, когда

$$\Delta h_1 = \frac{V}{S_1} = \frac{p_A}{\rho g}. \quad (4)$$

$$\text{Это может быть при высоте сосудов } H > \frac{p_A}{\rho g}. \quad (5)$$

После этого ($V \geq \frac{p_A S_1}{\rho g}$) при отборе жидкости уровень будет понижаться в обоих сосудах, а над жидкостью в сосуде №2 образуется пустота:

$$V = S_1 \Delta h_1 + S_2 \Delta h_2; \quad (6)$$

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 - \frac{p_A}{\rho g}. \quad (7)$$

Отсюда, решая систему уравнений, получаем

$$\Delta h_1 = \frac{V + S_2 \frac{p_A}{\rho g}}{S_1 + S_2}; \quad h_1 = H - \Delta h_1 = H - \frac{V + S_2 \frac{p_A}{\rho g}}{S_1 + S_2}; \quad (8)$$

$$\Delta h_2 = \frac{V - S_1 \frac{p_A}{\rho g}}{S_1 + S_2}; \quad h_2 = H - \Delta h_2 = H - \frac{V - S_1 \frac{p_A}{\rho g}}{S_1 + S_2}. \quad (9)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что в начале откачки уровень жидкости снижается только в сосуде №1	2
2	Получено $h_1 = H - \frac{V}{S_1}$, $h_2 = H$.	2
3	Записано граничное условие $\Delta h_1 = \frac{V}{S_1} = \frac{p_A}{\rho g}$ для начала опускания уровня жидкости в сосуде №2.	1
4	Указано, что при высотах $H > \frac{p_A}{\rho g}$ в сосуде №2 над жидкостью может образовываться пустота.	1
5	Записана система уравнений (6) и (7).	2
6	Получено решение для уровня в сосуде №1 - уравнение (8)	1
7	Получено решение для уровня в сосуде №2 - уравнение (9)	1
	Сумма	10

9.3. Внутри большой теплоизолированной емкости с водой при температуре $T_0 = 0^\circ\text{C}$ находится маленькая тонкостенная ёмкость с водой и кусочками льда массой $m_0 = 100$ г при той же температуре. Воду в большой ёмкости начинают нагревать так, что её температура увеличивается с постоянной скоростью. Часть тепла в результате теплообмена попадает внутрь маленькой ёмкости, и идет на плавление льда. Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур в большой и маленькой ёмкостях (закон Фурье). Известно, что когда температура в большой ёмкости достигла $T_1 = 50^\circ\text{C}$, внутри маленькой ёмкости расплавилось $m_1 = 10$ г льда. Оцените, какая масса льда m расплавится от начала нагрева до того момента, когда температура воды в большой ёмкости достигнет $T_2 = 100^\circ\text{C}$? Внутри каждой емкости содержимое активно перемешивается, так что температура во всех точках каждой емкости одинаковая.

Решение.

Предположим, что за всё время нагрева лёд в маленькой емкости весь не растает. Тогда температура маленькой емкости в течение всего процесса будет $T_0 = 0^\circ\text{C}$, а все получаемое тепло пойдет на плавление льда.

Поскольку мощность теплопередачи пропорциональна разности температур в большой и маленькой ёмкостях ($P = \alpha(T - T_0)$), а температура T растет линейно, то для первой части нагрева до $T_1 = 50^\circ\text{C}$ это эквивалентно, как если бы температура равнялась среднему значению

$$T_{cp1} = \frac{T_0 + T_1}{2}. \quad (1)$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\lambda m_1 = P_{cp1} \tau = \alpha \left(\frac{T_0 + T_1}{2} - T_0 \right) \tau = \alpha \tau \frac{T_1 - T_0}{2}, \quad (2)$$

где τ – время нагрева воды в большой емкости от T_0 до T_1 .

Заметим, что

$$T_2 - T_1 = T_1 - T_0, \quad (3)$$

и, следовательно, время нагрева от T_1 до T_2 также будет равно τ .

Тогда для второго участка нагрева:

$$T_{cp2} = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (4)$$

$$\lambda m_2 = P_{cp2} \tau = \alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) \tau, \quad (5)$$

где m_2 – масса льда, растаявшего на втором участке нагрева.

Разделим уравнение (5) на уравнение (2):

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} &= \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0}; \\ m_2 &= m_1 \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0}; \end{aligned} \quad (6)$$

Полная масса растаявшего льда:

$$m = m_1 + m_2 = m_1 + m_1 \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0} = m_1 \frac{2T_1 + T_2 - 3T_0}{T_1 - T_0}. \quad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим $m = 40$ г, что меньше $m_0 = 100$ г.

Примечание. Школьник может, пользуясь равномерностью нагрева и $T_1 = \frac{T_0 + T_2}{2}$, рассматривать сразу нагрев от T_0 до T_2 . В этом случае

$$T_{cp2} = \frac{T_0 + T_2}{2}. \quad (4)$$

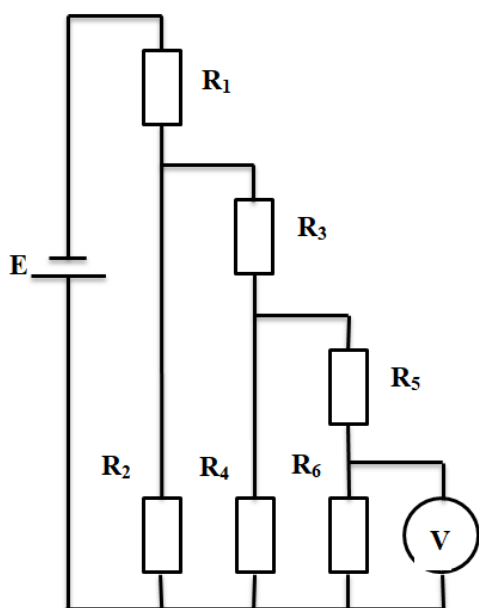
$$\lambda m = P_{cp2} \tau = \alpha \left(\frac{T_0 + T_2}{2} - T_0 \right) \cdot 2\tau = \alpha \frac{T_2 - T_0}{2} \cdot 2\tau \quad (5)$$

$$m = m_1 \frac{2T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0} = 40 \text{ г.} \quad (7)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что температура маленькой емкости в течение всего процесса будет $T_0 = 0^\circ\text{C}$.	1
2	Указано, что вследствие линейности нарастания температуры на первом участке ее можно заменить средним значением в виде уравнения (1) (или выполнено графическое интегрирование).	2
3	Записано уравнение теплового баланса (2) для процесса нагрева от T_0 до T_1 .	1
4	Указано, что времена нагрева воды в большой емкости от T_0 до T_1 и от T_1 до T_2 одинаковы.	1
5	Указано, что вследствие линейности нарастания температуры на втором участке (или для всего процесса) ее можно заменить средним значением в виде уравнения (4) (или выполнено графическое интегрирование).	2
6	Записано уравнение теплового баланса (5) для процесса нагрева от T_1 до T_2 (или для всего процесса нагрева от T_0 до T_2).	1
7	Получено выражение (7) для массы растаявшего льда (подстановка $T_1 = \frac{T_0 + T_2}{2}$ не является ошибкой).	1
8	Получено числовое значение $m = 40 \text{ г}$.	1
	Итого	10

9.4. Цепь состоит из идеального источника напряжения с ЭДС $E = 135$ В, резисторов R_1 – R_6 и идеального вольтметра (см. схему). При каком сопротивлении резистора R_4 вольтметр покажет значение $U = 5$ В? $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 15$ кОм, $R_5 = 40$ МОм, $R_6 = 20$ МОм.



Решение.

Можно заметить, что на схеме представлен многоступенчатый делитель напряжения. На каждом нижнем резисторе (R_n) выходное напряжение равно

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \frac{R_n}{R_g + R_n}. \quad (1)$$

Следовательно, на резисторе R_2 напряжение будет:

$$U_1 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{135B}{3} = 45 \text{ В}. \quad (2)$$

На резисторе R_4 напряжение будет:

$$U_2 = U_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4}. \quad (3)$$

На резисторе R_6 напряжение будет:

$$U = U_2 \frac{R_6}{R_5 + R_6}. \quad (4)$$

$$U_2 = U \frac{R_5 + R_6}{R_6} = 5B \cdot 3 = 15B. \quad (5)$$

Из уравнения (3):

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_4} = 1 + \frac{R_3}{R_4};$$

$$R_4 = R_3 \frac{U_2}{U_1 - U_2} = 15 \text{ кОм} \cdot \frac{1}{2} = 7,5 \text{ кОм}.$$

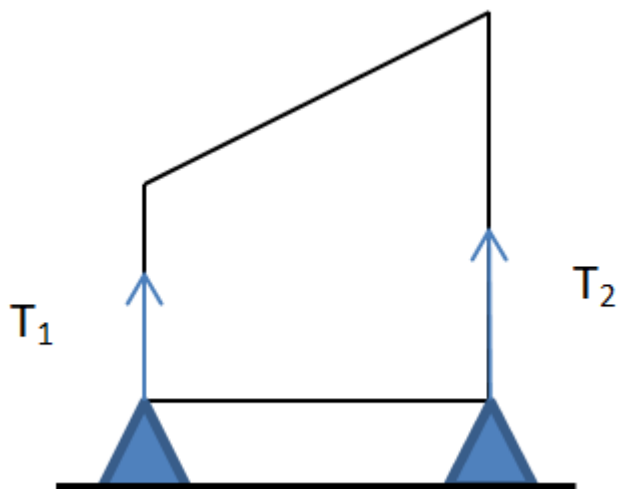
Примечание: Школьники может заметить, что $\frac{U}{E} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Значит, на каждом этапе напряжение падает в 3 раза, что возможно, когда нижний резистор по номиналу в 2 раза меньше верхнего, откуда получаем ответ.

Примечание. Величины сопротивлений $R_1, R_2 \ll R_3, R_4 \ll R_5, R_6 \ll R_U$ (сопротивление идеального вольтметра бесконечно большое). Поэтому ток, перетекающий по параллельному сопротивлению, мал, и $U_{вых} = U_{вх} \frac{R_n}{R_6 + R_n}$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Отмечено, что схема представляет собой многоступенчатый делитель напряжения.	2
2	Записана формула (1) для делителя напряжения.	1
3	Найдено напряжение U_1 на резисторе R_2	2
4	Записано выражение (3) для напряжения U_2 на резисторе R_4	1
5	Записано выражение (4) для напряжения U на резисторе R_6	1
6	Записано выражение (5) для напряжения U_2 на резисторе R_4 (или найдено числовое значение U_2)	2
7	Получен числовой ответ $R_4 = 7,5$ кОм (при качественном решении, как примечании, за правильный ответ ставим за задачу полный балл).	1
	Итого	10

9.5. Брусок в форме прямоугольной трапеции, длины оснований которой соотносятся как 1:2, своей боковой стороной опирается на 2 опоры, расположенные на горизонтальной поверхности (см. рисунок). Определить отношение сил реакций T_1/T_2 , действующих со стороны опор. Ускорение свободного падения g .



Решение.

Способ 1.

Пусть m – масса трапеции, a и $2a$ – стороны ее оснований, h – высота трапеции. Разобьем трапецию горизонтальным отрезком на 2 фигуры – прямоугольник со сторонами длиной a и h , и прямоугольный треугольник с катетами длиной a и h .

Площадь прямоугольного треугольника будет в 2 раза меньше площади прямоугольника со сторонами, равными катетам, следовательно, масса прямоугольника будет $2/3$ от массы трапеции, а масса треугольника – $1/3$ от массы трапеции.

Запишем уравнение моментов сил относительно каждой из опор. Для прямоугольника (центр масс посередине):

$$T_{1(n)} \cdot h = \frac{2}{3} mg \cdot \frac{h}{2}, \text{ или } T_{1(n)} = \frac{1}{3} mg; \quad (1)$$

$$T_{2(n)} \cdot h = \frac{2}{3} mg \cdot \frac{h}{2}, \text{ или } T_{2(n)} = \frac{1}{3} mg. \quad (2)$$

Для прямоугольного треугольника (центр масс в точке пересечения медиан, которая делит медианы как 2:1):

$$T_{1(m)} \cdot h = \frac{1}{3} mg \cdot \frac{h}{3}, \text{ или } T_{1(m)} = \frac{1}{9} mg; \quad (3)$$

$$T_{2(m)} \cdot h = \frac{1}{3} mg \cdot \frac{2h}{3}, \text{ или } T_{2(m)} = \frac{2}{9} mg. \quad (4)$$

Складывая (1) и (3), (2) и (4), получаем силы реакции опор:

$$T_1 = T_{1(n)} + T_{1(m)} = \frac{4}{9} mg; \quad (5)$$

$$T_2 = T_{2(n)} + T_{2(m)} = \frac{5}{9} mg. \quad (6)$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{4}{9}mg}{\frac{5}{9}mg} = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (7)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Предложено разделение трапеции на прямоугольник и прямоугольный треугольник	2
2	Найдено соотношение площадей (или объемов, или масс) прямоугольника и прямоугольного треугольника (или их отношение к трапеции).	1
3	Записано выражение (1) для прямоугольника для момента сил для силы T_1	1
4	Записано выражение (2) для прямоугольника для момента сил для силы T_2	1
5	Записано выражение (3) для треугольника для момента сил для силы T_1	1
6	Записано выражение (4) для треугольника для момента сил для силы T_2	1
7	Найдена сила $T_1 = 4mg/9$	1
8	Найдена сила $T_2 = 5mg/9$	1
9	Найдено отношение $T_1/T_2 = 4/5 = 0,8$.	1
	Итого	10

Способ 2.

Пусть m – масса трапеции, a и $2a$ – стороны ее оснований, h – высота трапеции.

Найдем координаты центра масс трапеции. Для этого дополним ее прямоугольным треугольником с катетами a и h . Тогда дополненная фигура будет представлять собой прямоугольный треугольник с катетами $2a$ и $2h$.

Поскольку трапецию можно разбить на 3 прямоугольных треугольника со сторонами a и h , то площадь маленьких треугольников будет равна $m/3$, а площадь большого треугольника – $4m/3$.

Воспользуемся тем фактом, что центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, которая делит медианы в соотношении 2:1. Следовательно, центр масс большого треугольника находится на высоте $\frac{2}{3}h$, а центр верхнего маленького треугольника – на высоте $h + \frac{h}{3} = \frac{4}{3}h$.

Пусть y – высота центра масс в рассматриваемой трапеции. Тогда, по определению центра масс:

$$\frac{2}{3}h = \frac{m \cdot y + \frac{m}{3} \cdot \frac{4}{3}h}{\frac{4}{3}m}. \quad (1)$$

Сократим на m и умножим обе части уравнения на $4/3$:

$$\frac{8}{9}h = y + \frac{4}{9}h;$$

$$y = \frac{4}{9}h. \quad (2)$$

Запишем уравнение моментов сил относительно каждой из опор.

$$T_1 \cdot h = mg \cdot y = mg \cdot \frac{4}{9}h; \quad (3)$$

$$T_2 \cdot h = mg \cdot (h - y) = mg \cdot \frac{5}{9}h. \quad (4)$$

Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{4}{9}mg}{\frac{5}{9}mg} = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (5)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Предложено дополнение трапеции до прямоугольного треугольника с катетами $2a$ и $2h$.	2
2	Найдены массы маленького и большого треугольников через массу трапеции.	1
3	Записано, что центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, которая делит медианы в соотношении $2:1$.	1
4	Записано соотношение (1) для центров масс	2
5	Найдена высота центра масс трапеции $y = 4h/9$.	1
6	Записано выражение (3) для трапеции для момента сил для силы T_1	1
7	Записано выражение (4) для трапеции для момента сил для силы T_2	1
8	Найдено отношение $T_1/T_2 = 4/5 = 0,8$.	1
	Итого	10

10.1. Снаряд, выпущенный со скоростью v_0 из пушки, стоящей на горизонтальной поверхности, упал на расстоянии L от нее (при этом $v_0 > \sqrt{Lg}$). Определите возможное время t полета снаряда и угол α с горизонтальной поверхностью, под которым был выпущен снаряд. Ускорение свободного падения g , сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Вариант 1

Воспользуемся формулой расстояния от точки выстрела до точки падения:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad (1)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{Lg}{v_0^2} < 1; \quad (2)$$

Этому синусу соответствуют как минимальный угол

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right), \quad (3)$$

так и максимальный

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right) \right). \quad (4)$$

Далее находим время t как

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \quad (5)$$

или, используя (1),

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6)$$

Подставляя значения (3) и (4) в уравнение (6), и проводя тригонометрические преобразования, получаем два значения времени полета:

$$t_{\min} = \frac{2v_0 \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right)\right)}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2}\right)^2}}; \quad (6)$$

$$t_{\max} = \frac{2v_0 \sin\left(\frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right) \right)\right)}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2}\right)^2}}. \quad (7)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для расстояния от точки выстрела до точки падения	1
2	Записано уравнение (2) для $\sin 2\alpha$.	1
3	Получены решения (3) и (4) для минимального и максимального угла	2
4	Записано уравнение (5) или (6) для зависимости времени полета от угла с горизонталью.	2

5	Получено выражение (6) для $t_{\min}$ (можно без тригонометрического преобразования к окончательному ответу)	2
6	Получено выражение (7) для $t_{\max}$ (можно без тригонометрического преобразования к окончательному ответу)	2
	Сумма	10

Вариант 2

Пусть x – горизонтальная ось, y – вертикальная. Запишем уравнения для точки падения снаряда для каждой из осей:

$$L = v_0 t \cos \alpha ; \quad (1)$$

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} . \quad (2)$$

Выразим из уравнения (2) величину $\sin \alpha$ и подставим в уравнение (1):

$$\sin \alpha = \frac{gt}{2v_0} ;$$

$$L = v_0 t \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = v_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{gt}{2v_0} \right)^2} . \quad (3)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$L^2 = v_0^2 t^2 \left(1 - \frac{g^2 t^2}{4v_0^2} \right) .$$

Сделав замену $t^2 = z$, получим квадратное уравнение:

$$z^2 - \frac{4v_0^2}{g^2} z + \frac{4L^2}{g^2} = 0 . \quad (4)$$

Решаем его через половинный дискриминант:

$$D = \left(\frac{2v_0^2}{g^2} \right)^2 - \frac{4L^2}{g^2} = \frac{4(v_0^4 - L^2 g^2)}{g^4} ;$$

$$z = t^2 = \frac{2v_0^2}{g^2} \pm \frac{2\sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}{g^2} . \quad (5)$$

Минимальному значению времени соответствует знак «минус»:

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{2v_0^2 - 2\sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} . \quad (6)$$

Соответствующий этому времени угол также является минимальным:

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{gt_{\min}}{2v_0} = \frac{g}{2v_0} \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} . \quad (7)$$

$$\sin 2\alpha_{\min} = 2 \sin \alpha_{\min} \cos \alpha_{\min} = \frac{Lg}{v_0^2} .$$

Навесной траектории соответствует максимальное время полета и максимальный угол:

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{2v_0^2 + 2\sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} ; \quad (8)$$

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}}. \quad (9)$$

$$\sin 2\alpha_{\max} = 2 \sin \alpha_{\max} \cos \alpha_{\max} = \frac{Lg}{v_0^2}.$$

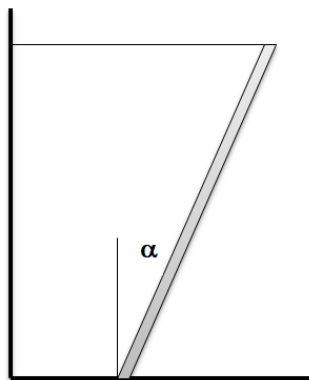
Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для движения по оси x	1
2	Записано уравнение (2) для движения по оси y	1
3	Записано биквадратное (квадратное) уравнение (4) относительно t	2
4	Получено решение (5) квадратного уравнения	2
5	Записано выражение (6) для минимального времени	1
6	Записано выражение (7) для минимального угла	1
7	Записано выражение (8) для максимального времени	1
8	Записано выражение (9) для максимального угла	1
	Сумма	10

10.2. Тонкая палочка длины L и массой M установлена на шероховатой поверхности с коэффициентом трения покоя μ так, что нижним концом она упирается в поверхность под углом α к вертикали, а к верхнему концу прикреплена лёгкая горизонтальная нерастяжимая нить, которая через легкий динамометр прикреплена к стене (см. рисунок).

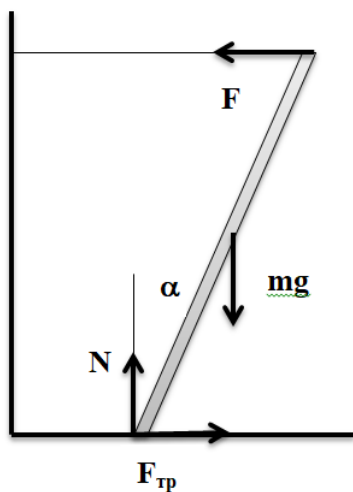
А) Чему равно показание динамометра F при угле наклона α ?

Б) Какой максимальный угол наклона $\alpha_{\max}$ может быть достигнут, чтобы не началось проскальзывание палочки?



Решение.

Нарисуем схему, расставим силы и углы.



Запишем уравнение равенства моментов сил относительно нижней точки палочки:

$$Mg \sin \alpha \cdot \frac{L}{2} = F \cos \alpha \cdot L. \quad (1)$$

Отсюда

$$F = \frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

В равновесии по оси x выполняется равенство сил:

$$F = F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu Mg; \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq \mu Mg;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &\leq 2\mu; \\ \alpha &\leq \alpha_{\max} = \operatorname{arctg}(2\mu). \end{aligned} \quad (4)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Нарисована схема, правильно расставлены силы и углы	2
2	Записано уравнение моментов сил $Mg \sin \alpha \cdot \frac{L}{2} = F \cos \alpha \cdot L$	2
3	Получено выражение для силы $F = \frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$	2
4	Записано уравнение $F = F_{\text{тр}} \leq \mu Mg$	2
5	Получено выражение для угла $\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}(2\mu)$ или $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = 2\mu$	2
	Итого	10

10.3. Измерения показывают, что мощность излучения Солнца равна $\alpha = 1,366$ киловатт на квадратный метр поверхности Земли, которая вращается по круговой орбите с периодом $T = 1$ год на расстоянии $R = 150$ млн. км от звезды.

А) Оцените скорость движения Земли вокруг Солнца (в км/с);

Б) Оцените массу Солнца (в кг);

В) Найдите отношение удельной мощности излучения Солнца к удельной тепловой мощности излучения тепла человеком массой $m = 70$ кг, который за сутки потребляет $q = 2400$ килокалорий (в тепло переходит примерно половина потребленной энергии). *Примечание:* 1 калория = 4,2 Джоуля.

Гравитационная постоянная: $G = 6,6743 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$

Решение.

А) Скорость движения Земли вокруг Солнца:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 29,8 \text{ км/с}. \quad (1)$$

Б) Запишем условие движения по круговой орбите:

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}; \quad (2)$$

$$M = \frac{v^2 R}{G} = \frac{(2,98 \cdot 10^4 \text{ м/с})^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}}{6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}} \approx 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг} \quad (3)$$

В) Найдём суммарную мощность излучения Солнца. Для этого умножим мощность на кв. метр на площадь сферы с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца:

$$P_c = \alpha S = \alpha \cdot 4\pi R^2 = 1,366 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 \cdot 4\pi (1,5 \cdot 10^{11} \text{ м})^2 \approx 3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт}. \quad (4)$$

Удельная мощность излучения Солнца:

$$P_{c(y\theta)} = \frac{P_c}{M} = \frac{3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт}}{2 \cdot 10^{30} \text{ кг}} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/кг}. \quad (5)$$

Тепловая мощность излучения человеком:

$$P_q = \frac{q}{t} = \frac{0,5 \cdot 2,4 \cdot 10^6 \text{ кал} \cdot 4,2 \text{ Дж/кал}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 58,3 \text{ Вт}. \quad (6)$$

Удельная мощность излучения человека:

$$P_{q(y\theta)} = \frac{P_q}{m} = \frac{58,3 \text{ Вт}}{70 \text{ кг}} \approx 0,83 \text{ Вт/кг}. \quad (7)$$

Отсюда находим отношение:

$$\frac{P_{c(y\theta)}}{P_{q(y\theta)}} \approx 2,3 \cdot 10^{-4} \ll 1. \quad (8)$$

Такой нетривиальный результат обусловлен огромной массой Солнца.

Примечание. Школьники могут подумать о сделанной где-то ошибке и дать в ответе обратную величину порядка 10^4 .

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для скорости движения Земли	1
2	Получено числовое значение для скорости 29,8 км/с (возможно округление до 30 км/с).	1
3	Записано условие движения по круговой орбите (2)	1
4	Получена формула для массы Солнца (3)	1
5	Получено числовое значение для массы Солнца $2 \cdot 10^{30}$ кг	1
6	Найдена суммарная мощность теплового излучения Солнца (4)	1
7	Найдена удельная мощность теплового излучения Солнца (5)	1
8	Найдена суммарная мощность теплового излучения человека (6) При потере множителя 50% – 0,5 балла, дальше не снижаем	1
9	Найдена удельная мощность теплового излучения человека (7)	1
10	Получено числовое значение отношения удельных мощностей теплового излучения Солнца и человека порядка 10^{-4} . При указании в качестве ответа обратной величины – 0 баллов за данный пункт.	1
	Сумма	10

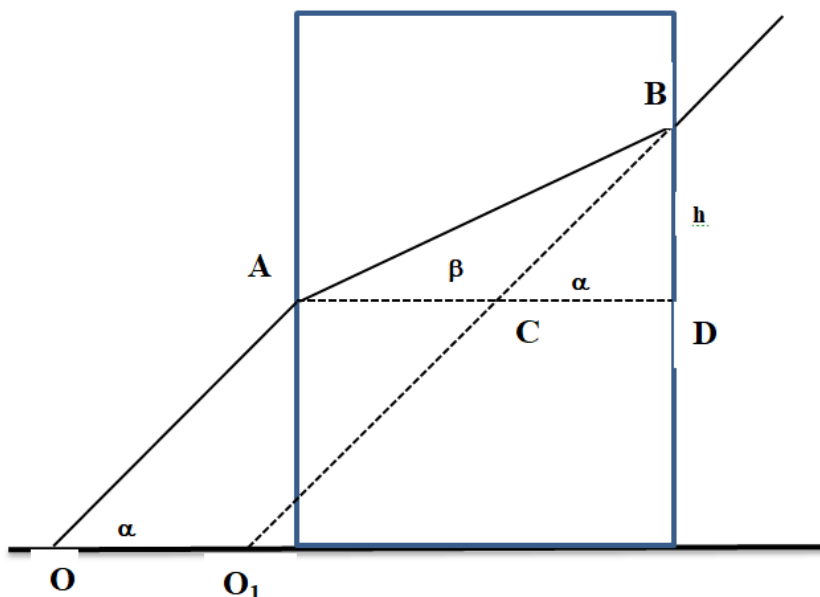
10.4. Точечный источник света помещен на расстоянии $a = 16$ см от плоского зеркала. На какое расстояние сместится изображение источника, если между источником и зеркалом параллельно плоскости зеркала поместить стеклянную плоскопараллельную пластину толщиной $d = 8$ см и показателем преломления $n = 2$? Указание: используйте параксиальное приближение о малости углов.

Решение.

В первом случае расстояния между источником и зеркалом, и между зеркалом и мнимым изображением равны:

$$b_1 = a = 16 \text{ см.} \quad (1)$$

Рассмотрим теперь качественное прохождение через плоскопараллельную пластину луча света, выпущенного источником под углом α к перпендикуляру к пластинке (см. рисунок).



В точке А луч преломляется и идет под углом β к оси до точки В, в которой снова преломляется на границе с воздухом и идет дальше под углом α . Продолжение этого луча в обратную сторону дает пересечение в точке O_1 . Таким образом, вставка плоскопараллельной пластины равносильна смещению *вправо* источника света из точки О в точку O_1 .

Найдем угол β из закона Снеллиуса:

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (2)$$

В параксиальном приближении (для малых углов):

$$\alpha = n \cdot \beta. \quad (3)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и CBD. Пусть $AC = x$, $BD = h$, $AD = d$ (толщине пластины). Тогда:

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \beta \approx d \cdot \beta; \quad (4)$$

$$h = (d - x) \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx (d - x) \cdot \alpha; \quad (5)$$

Приравниваем:

$$d \cdot \beta = (d - x) \cdot \alpha; \quad (6)$$

Воспользуемся соотношением (3):

$$d = (d - x) \cdot n \quad (7)$$

$$\text{Отсюда } x = d \frac{n-1}{n} = 8 \text{ см} \cdot \frac{2-1}{2} = 4 \text{ см.} \quad (8)$$

$$a_2 = a - x = 12 \text{ см.} \quad (9)$$

Для второго случая расстояние от точки O_1 эффективного размещения источника и расстояние между источником и изображением также равны:

$$b_2 = a_2 = 12 \text{ см.} \quad (10)$$

Мнимое изображение сместится влево на $b_2 - b_1 = 4 \text{ см.}$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для первого случая, найдено расстояние от зеркала до изображения	1
2	Построен или качественно описан ход луча в плоскопараллельной пластине	3
3	Записан закон Снеллиуса	1
4	Найдено эквивалентное смещение источника x в параксиальном приближении – формула (8)	2
5	Найдено расстояние до эквивалентного источника a_2 – формула (9)	1
6	Записана формула (10) для второго случая, найдено расстояние от зеркала до изображения	1
7	Найдено смещение изображения (влево на 4 см).	1
	Сумма	10

10.5. При последовательном подключении к омметру алюминиевого шара и медного куба школьник Вася получает значение сопротивления $R_1 = 63$ Ом. При последовательном подключении медного шара и алюминиевого куба тех же размеров – сопротивление $R_2 = 73,5$ Ом. Какое сопротивление R_3 покажет омметр при параллельном подключении алюминиевого шара и медного куба? Удельное сопротивление алюминия равно $\rho_A = 0,028$ Ом·мм²/м, меди – $\rho_M = 0,0175$ Ом·мм²/м.

Решение.

Пусть x_1 – геометрический фактор электрического сопротивления для шара, x_2 – для куба. Тогда сопротивление при последовательном подключении к омметру алюминиевого шара и медного куба:

$$R_1 = \rho_A x_1 + \rho_M x_2. \quad (1)$$

При последовательном подключении медного шара и алюминиевого куба тех же размеров:

$$R_2 = \rho_M x_1 + \rho_A x_2. \quad (2)$$

Умножим уравнение (1) на ρ_A , уравнение (2) – на ρ_M , и вычтем второе уравнение из первого:

$$R_1 \rho_A - R_2 \rho_M = \rho_A^2 x_1 - \rho_M^2 x_1;$$

$$x_1 = \frac{R_1 \rho_A - R_2 \rho_M}{\rho_A^2 - \rho_M^2} \approx 1000 \text{ м/мм}^2. \quad (3)$$

Аналогично можно получить

$$x_2 = \frac{R_2 \rho_A - R_1 \rho_M}{\rho_A^2 - \rho_M^2} \approx 2000 \text{ м/мм}^2. \quad (4)$$

При параллельном подключении алюминиевого шара и медного куба сопротивление будет равно:

$$R_3 = \frac{\rho_A x_1 \cdot \rho_M x_2}{\rho_A x_1 + \rho_M x_2} = \frac{28 \text{ Ом} \cdot 35 \text{ Ом}}{63 \text{ Ом}} \approx 15,6 \text{ Ом}. \quad (5)$$

Примечание: подставив выражения (3) и (4) в формулу (5), получим:

$$R_3 = \frac{\rho_A \rho_M (R_1 \rho_A - R_2 \rho_M)(R_2 \rho_A - R_1 \rho_M)}{R_1 (\rho_A^2 - \rho_M^2)^2} \quad (6)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Есть идея геометрических факторов для шара и куба (ставим за этот пункт полный балл при наличии уравнений (1) и (2)).	1
2	Записана формула (1) для последовательного подключения к омметру алюминиевого шара и медного куба	1
3	Записана формула (2) для последовательного подключения к омметру алюминиевого куба и медного шара	1
4	Получено выражение (3) для геометрического фактора шара	1
5	Получено числовое значение 1000 м/мм^2 для геометрического фактора шара или сопротивление любого шара. При наличии формулы (6) добавляем этот балл к п. 9.	1
6	Получено выражение (4) для геометрического фактора куба	1
7	Получено числовое значение 2000 м/мм^2 для геометрического фактора куба или сопротивление любого куба. При наличии формулы (6) добавляем этот балл к п. 9.	1
8	Записана формула (5) при параллельном подключении к омметру алюминиевого шара и медного куба	1
9	Найдено числовое значение $R_3 = 15,6 \text{ Ом}$ (наличие формулы (6) необязательно при наличии числовых значений для геометрических факторов). Допустим целочисленный ответ 15 Ом или 16 Ом.	2
	Сумма	10

11.1. Установка, стоящая на краю вертикального обрыва, запускает в море маленький мячик со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной плоскости. Мячик упал в море под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонтальной плоскости. Определите высоту обрыва H над уровнем моря, расстояние L по горизонтали от обрыва до точки падения, скорость мяча v_k при падении, время t полета шарика. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Решение.

Векторный метод

Рассмотрим векторный треугольник скоростей, где вектор ускорения свободного падения направлен вертикально вниз.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Для радиус-вектора (начало отсчета свяжем с установкой):

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \text{ или } \frac{\vec{r}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}.$$

Вектор $\vec{r}/t$ является медианой векторного треугольника скоростей, а его проекция на горизонтальное направление L/t — высотой треугольника. Углы треугольника равны $\alpha + \beta$, $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$.

Проекция скоростей на горизонтальную прямую (высоту треугольника):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta; \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_k^2}{2}. \quad (3)$$

$$H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (4)$$

Из теоремы синусов:

$$\frac{gt}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{v_0}{\sin(90^\circ - \beta)}. \quad (5)$$

Отсюда

$$t = \frac{v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = \frac{10 \text{ м/с}}{10 \text{ м/с}^2} \frac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ секунды.}$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{t} \cdot gt = \frac{1}{2} v_0 v_k \sin(\alpha + \beta). \quad (6)$$

Отсюда

$$L = \frac{v_0 v_k \sin(\alpha + \beta)}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = 17,3 \text{ метров} \quad (7)$$

Примечание: школьник может заметить, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. векторный треугольник скоростей является прямоугольным, и решать этот частный случай.

№	Критерий	Баллы
1	Записаны формулы для векторного треугольника скоростей, или сделан рисунок треугольника	2
2	Записана формула $v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta$	1
3	Получена формула для конечной скорости v_k	0,5
4	Получено числовое значение $v_k \approx 17,3$ м/с.	0,5
5	Записан закон сохранения механической энергии	1
6	Получена формула для высоты обрыва H	0,5
7	Получено числовое значение для высоты обрыва $H \approx 10$ м.	0,5
8	Записана теорема синусов	1
9	Получена формула для времени полета t	0,5
10	Получено числовое значение для времени полета $t \approx 2$ с.	0,5
11	Записаны формулы для площади векторного треугольника	1
12	Получена формула для расстояния L	0,5
13	Получено числовое значение для расстояния $L \approx 17,3$ м.	0,5
	Сумма	10

Координатный метод

При полете шарика его горизонтальная компонента скорости не меняется:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta; \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_k^2}{2}. \quad (3)$$

$$H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (4)$$

Рассмотрим время подъема шарика как время уменьшения вертикальной компоненты начальной скорости до 0:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (5)$$

а время падения – как время увеличения вертикальной компоненты от 0 до v_{ky} :

$$t_2 = \frac{v_{ky}}{g} = \frac{v_k \sin \beta}{g}. \quad (6)$$

Общее время полета:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{v_k \sin \beta}{g} = \frac{v_0}{g} \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta \right) = \frac{v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (7)$$

Подставим значения:

$$t = \frac{10 \text{ м/с}}{10 \text{ м/с}^2} \frac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ секунды.}$$

Расстояние L по горизонтали от обрыва до точки падения:

$$L = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = 17,3 \text{ м.} \quad (8)$$

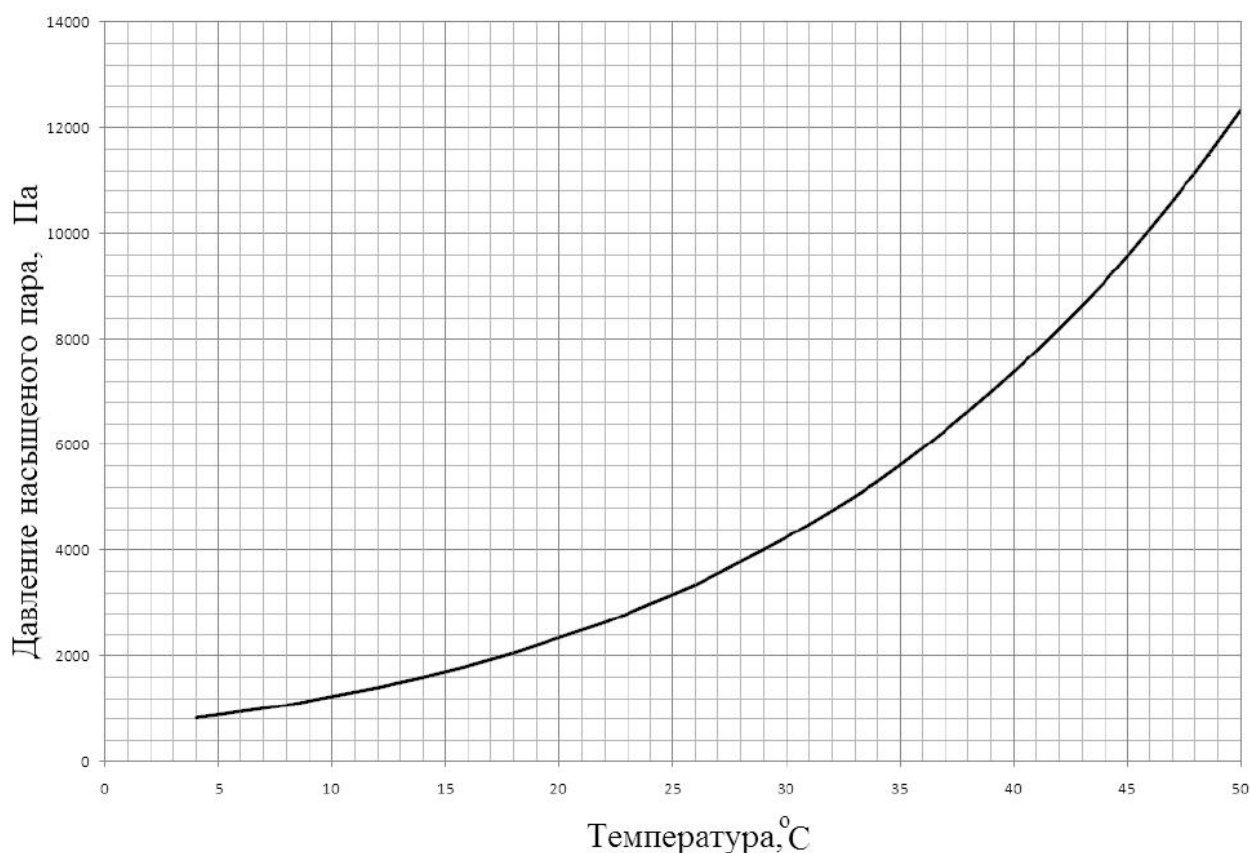
Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Есть идея решения, схема движения шарика	1
2	Записана формула $v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta$	1
3	Получена формула для конечной скорости v_k	0,5
4	Получено числовое значение $v_k \approx 17,3 \text{ м/с.}$	0,5
5	Записан закон сохранения механической энергии	1
6	Получена формула для высоты обрыва H	0,5
7	Получено числовое значение для высоты обрыва $H \approx 10 \text{ м.}$	0,5
8	Найдено время подъема шарика	1
9	Найдено время падения шарика	1
10	Получена формула для времени полета t	0,5
11	Получено числовое значение для времени полета $t \approx 2 \text{ с.}$	0,5
12	Записаны формулы для равномерного движения по горизонтали	1
13	Получена формула для расстояния L	0,5
14	Получено числовое значение для расстояния $L \approx 17,3 \text{ м.}$	0,5
	Сумма	10

11.2. В процессе дыхания человека воздух, находящийся в альвеолах легких, из-за испарения воды достигает 100% влажности. Однако измерения относительной влажности выдыхаемого теплого воздуха показывают лишь 80% из-за наличия трахеи и бронхов, в которых испарение воды практически не происходит.

А) Оцените общий объем альвеол у человека (в литрах), если суммарный объем легких и дыхательных путей равен 5 литрам, а влажностью воздуха в дыхательных путях можно пренебречь.

Б) Оцените, сколько воды (в граммах) теряет здоровый человек (с температурой тела 36,6 °С) за сутки через выдыхаемый воздух, если в окружающей среде температура 20 °С и относительная влажность 50%? Принять, что в покое за 1 минуту легкие человека вентилируют 6 л воздуха, который прогревается до температуры тела. Молярная масса воды 18 г/моль.



Решение.

А) При выходе 100% влажного воздуха из альвеол он смешивается с практически сухим воздухом дыхательных путей, вследствие чего снижается относительная влажность.

$$\varphi_2 V_{\text{общ}} = \varphi_1 V_A, \quad (1)$$

где $\varphi_1 = 100\%$ — относительная влажность воздуха в альвеолах, $\varphi_2 = 80\%$ — относительная влажность воздуха после смешивания с сухим воздухом, V_A — объем альвеол, $V_{\text{общ}}$ — общий объем дыхательных путей и альвеол.

$$V_A = V_{\text{общ}} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 4 \text{ л.} \quad (2)$$

Б) При температуре $T_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C} = 293\text{ К}$ и относительной влажности $\varphi_0 = 50\%$ окружающей среды давление паров воды во вдыхаемом воздухе будет равно

$$p_0 = 0,5 * 2400\text{ Па} = 1200\text{ Па}.$$

Найдем массу воды в альвеолах при поступлении туда вдыхаемого воздуха. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$p_0 V = \frac{m_0}{\mu} RT_0; \quad (3)$$

$$m_0 = \frac{p_0 V \mu}{RT_0}. \quad (4)$$

Здесь V – объем вентилируемого за 1 минуту воздуха, который за минуту проходит через альвеолы (80% от всего объема, т.е. $V = 4,8\text{ л.}$). Как вариант, можно рассматривать весь вентилируемый объем с относительной влажностью $\varphi_2 = 80\%$.

В конце вдоха температура воздуха повышается до $T_1 = 36,6\text{ }^{\circ}\text{C} = 309,6\text{ К}$, что при 100% влажности дает давление паров воды $p_1 = 6000\text{ Па}$.

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1. \quad (5)$$

Масса воды в альвеолах в конце вдоха:

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu}{RT_1}. \quad (6)$$

Таким образом, за 1 минуту испаряется масса воды:

$$m_1 - m_0 = \frac{p_1 V \mu}{RT_1} - \frac{p_0 V \mu}{RT_0} = \frac{V \mu}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_0}{T_0} \right) \approx 0,16\text{ г.} \quad (7)$$

За сутки испарится $0,16\text{ г} * 60 * 24 \approx 230\text{ г}$ воды.

Примечание: после нагрева вдыхаемого воздуха с $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ его относительная влажность будет $\varphi_0 = 0,5 * 2400\text{ Па} / 6000\text{ Па} = 20\%$. Если учесть это при решении пункта А, получим:

$$V_{\text{общ}} = V_A + V_{II};$$

$$\varphi_2 V_{\text{общ}} = \varphi_1 V_A + \varphi_0 V_{II}.$$

Решая систему уравнений, получаем $V_A = 0,75 V_{\text{общ}} = 3,75\text{ л}$, что близко к 4 л.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для влажности в альвеолах и в выдыхаемом воздухе	1
2	Найден объем альвеол 4 л (допустим вариант 3,75 л)	1
3	По графику найдено парциальное давление паров воды 1200 Па во вдыхаемом воздухе (с учетом относительной влажности 50%).	1
4	Записано уравнение (3) для вдыхаемого воздуха.	1
5	Записано выражение (4) для массы воды m_0 для вдыхаемого воздуха в вентилируемом за 1 минуту (или другое время) объеме альвеол	1
6	По графику найдено парциальное давление паров воды 6000 Па для воздуха в альвеолах.	1
7	Записано уравнение (5) для воздуха в альвеолах.	1
8	Записано выражение (6) для массы воды m_1 для воздуха в конце вдоха в вентилируемом за 1 минуту (или другое время) объеме альвеол	1
9	Найдена масса воды, которая испаряется в альвеолах за 1 минуту	1
10	Найдена масса воды, которая испаряется в альвеолах за 1 сутки	1
	Сумма	10

Примечания по разбалловке:

- могут считать вентилируемый объем сразу за 1 сутки, тогда за п. 9 и 10 ставим вместе 2 балла.

- если не учесть испарение воды только в альвеолах, то ответ получается на 20% больше – 0,20 г/мин и 288 г/сутки. За такой ответ предлагается ставить за п. 9 и 10 по 0,5 балла.

11.3. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m = 10$ кг. Коэффициент трения покоя между бруском и поверхностью – $\mu_1 = 0,5$, коэффициент трения скольжения – $\mu_2 = 0,4$. На брусок в горизонтальном направлении действует сила $F = 120$ Н. Во сколько раз изменится сила трения, действующая на тело, если горизонтальную силу уменьшить в 6 раз? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение.

Найдем минимальную силу, которую надо приложить горизонтально к бруску, чтобы сдвинуть его с места:

$$F_{\min} = \mu_1 N = \mu_1 mg = 0,5 * 10 \text{ кг} * 10 \text{ м/с}^2 = 50 \text{ Н.} \quad (1)$$

Поскольку $F > F_{\min}$, то брусок будет скользить с некоторым ускорением, а сила трения скольжения будет равна

$$F_{\text{тр}(1)} = \mu_2 N = \mu_2 mg = 0,4 * 10 \text{ кг} * 10 \text{ м/с}^2 = 40 \text{ Н.} \quad (2)$$

После уменьшения силы, действующей на тело, в 6 раз, она станет равна

$$F_2 = F / 6 = 20 \text{ Н.} \quad (3)$$

Поскольку $F_2 < F_{\min}$, то брусок будет покоиться, а сила трения будет равна силе, действующей на тело (векторная сумма сил равна 0):

$$F_{\text{тр}(2)} = F_2 = 20 \text{ Н.} \quad (4)$$

Отсюда находим, что сила трения уменьшилась в 2 раза.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для минимальной силы $F_{\min}$, которую надо приложить горизонтально к бруску, чтобы сдвинуть его с места, и вычислено её значение.	2
2	Записано, что $F > F_{\min}$, и скольжение бруска по горизонтальной поверхности	1
3	Записано выражение (2) для силы трения скольжения $F_{\text{тр}(1)}$	1
4	Вычислено значение 40 Н для силы трения скольжения $F_{\text{тр}(1)}$	1
5	Найдена сила F_2 , действующая на брусок во втором случае.	1
6	Записано, что $F_2 < F_{\min}$, и что брусок будет покоиться.	1
7	Записано, что сила трения будет равна силе, действующей на тело (или что для покоящегося тела векторная сумма сил равна 0).	1
8	Вычислено значение 20 Н для силы трения скольжения $F_{\text{тр}(2)}$	1
9	Найдено, сила трения уменьшилась в 2 раза	1
	Сумма	10

11.4. Для отображения сигнала на экране осциллографа используется электронно-лучевая трубка, в которой тонкий пучок электронов отклоняется при его прохождении через плоский конденсатор (пластины конденсатора перпендикулярны плоскости экрана, пучок входит в конденсатор посередине между пластинами). Пусть l_1 – длина пластин конденсатора, d – расстояние между пластинами, L – расстояние от середины пластин до экрана ($L \gg l_1$), $2H$ – размер экрана по горизонтали, v_0 – скорость электронов в пучке, m и e – масса и заряд электрона. Луч пробегает с постоянной скоростью по экрану по горизонтальной оси от левого края до правого края за время T ($T \gg L/v_0$). Определите функцию зависимости разности потенциалов между пластинами U от времени t для отображения такого сигнала.

Решение.

Пусть z – ось, параллельная пластинам конденсатора, x – ось, параллельная плоскости экрана и перпендикулярная пластинам конденсатора.

Запишем уравнение движения электронов вдоль осей:

$$z = v_0 t, \quad x = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Ускорение можно найти из 2-го закона Ньютона:

$$a = \frac{eE_x}{m} = \frac{eU}{md}, \quad (2)$$

где E_x – напряженность электрического поля внутри конденсатора, U – установленная разность потенциалов.

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$x = \frac{eU}{2mv_0^2 d} z^2. \quad (3)$$

Т.е. траектория электронов между пластинами конденсатора представляет собой параболу. За время прохождения конденсатора смещение пучка составит

$$h_1 = \frac{eU}{2mv_0^2 d} l_1^2, \quad (4)$$

а тангенс угла отклонения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{eU}{mv_0^2 d} l_1. \quad (5)$$

Выйдя из пластин конденсатора, электроны продолжают движение по прямой линии. Пусть l_2 – расстояние от края пластин конденсатора до экрана. Смещение отметки на экране составит:

$$h = h_1 + l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{eU}{mv_0^2 d} l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) = \frac{eU l_1 L}{mv_0^2 d}. \quad (6)$$

Отсюда получаем выражение для напряжения U на конденсаторе, необходимое для смещения h отметки на экране:

$$U = \frac{mv_0^2 d}{el_1 L} h. \quad (7)$$

Поскольку по условию задачи время движения луча по экрану T много больше времени полета электрона между пластинами конденсатора и далее к экрану, можно считать, что текущее напряжение U практически сразу отображается в виде смещения сигнала на экране.

За время T сигнал с постоянной скоростью проходит от координаты $-H$ до координаты H . Этому соответствует функция

$$h(t) = \frac{H}{T}t - H. \quad (8)$$

Подставляя в (7), получаем:

$$U(t) = \frac{mv_0^2 d}{el_1 L} h(t) = \frac{mv_0^2 d}{el_1 L} \cdot \left(\frac{H}{T}t - H \right). \quad (9)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) движения электронов внутри конденсатора	1
2	Найдено ускорение – уравнение (2)	1
3	Показано, что траектория электронов между пластинами конденсатора представляет собой параболу – уравнение (3)	1
4	Найдено смещение пучка электронов внутри конденсатора – уравнение (4)	1
5	Найден угол (или тангенс угла) отклонения – уравнение (5)	1
6	Получена связь между смещением отметки на экране и напряжением на конденсаторе – уравнения (6), (7)	2
7	Отмечено, что ввиду $T \ll L/v_0$ текущее напряжение U практически сразу отображается в виде смещения сигнала на экране (пренебрегаем задержкой времени на пролёт электронов)	1
8	Получено уравнение (8) для зависимости координаты отметки на экране от времени	1
9	Записана функция зависимости (9) для разности потенциалов между пластинами U от времени t	1
	Сумма	10

11.5. Точечный источник света помещен на расстоянии $a = 16$ см от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Фокусное расстояние линзы равно $F = 8$ см. Между источником и линзой перпендикулярно главной оптической оси вставлены 2 стеклянные плоскопараллельные пластины толщиной $d = 4$ см и показателем преломления $n = 2$ каждая. На какое расстояние сместится изображение источника, если одну из пластин перенести в фокусную плоскость с другой стороны линзы? Указание: используйте параксиальное приближение о малости углов.

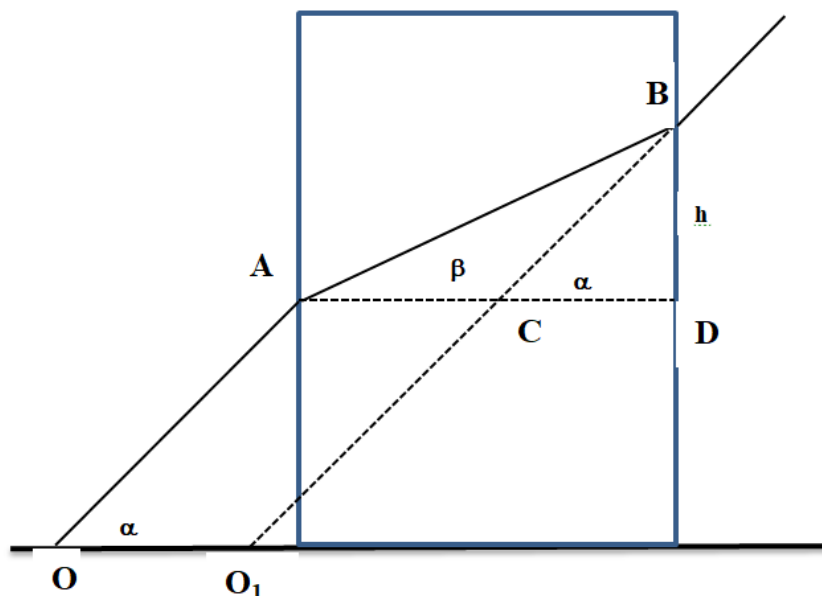
Решение.

Запишем формулу тонкой линзы для случая, когда нет пластин:

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

$$b_0 = \frac{a_0 F}{a_0 - F} = \frac{16 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}}{8 \text{ см}} = 16 \text{ см}. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь качественно прохождение через плоско-параллельную пластину луча света, выпущенного источником под углом α к главной оптической оси линзы (см. рисунок).



В точке А луч преломляется и идет под углом β к оси до точки В, в которой снова преломляется на границе с воздухом и идет дальше под углом α . Продолжение этого луча в обратную сторону дает пересечение в точке O_1 . Таким образом, вставка плоско-параллельной пластины равносильно смещению вправо источника света из точки О в точку O_1 (или смещению вправо изображения, если пластина с другой стороны линзы).

Найдем угол β из закона Снеллиуса:

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (3)$$

В параксиальном приближении (для малых углов):

$$\alpha = n \cdot \beta. \quad (4)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и CBD. Пусть $AC = x$, $BD = h$, $AD = d$ (толщине пластины). Тогда:

$$h = d \cdot \tan \beta \approx d \cdot \beta; \quad (5)$$

$$h = (d - x) \cdot \tan \alpha \approx (d - x) \cdot \alpha; \quad (6)$$

Приравниваем:

$$d \cdot \beta = (d - x) \cdot \alpha; \quad (7)$$

Воспользуемся выражением (4):

$$d = (d - x) \cdot n \quad (8)$$

$$\text{Отсюда } x = d \frac{n-1}{n} = d \frac{2-1}{2} = \frac{d}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, пластина толщиной d приводит к эффективному смещению источника (или изображения) вправо на расстояние $d/2$.

Для первого случая:

$$a_1 = a_0 - 2 \cdot \frac{d}{2} = 12 \text{ см}. \quad (10)$$

$$b_1 = \frac{a_1 F}{a_1 - F} = \frac{12 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}}{4 \text{ см}} \approx 24 \text{ см}. \quad (11)$$

Для второго случая:

$$a_2 = a_0 - \frac{d}{2} = 14 \text{ см}. \quad (12)$$

$$b_2 = \frac{a_2 F}{a_2 - F} + \frac{d}{2} = \frac{14 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}}{6 \text{ см}} + 2 \text{ см} \approx 20,7 \text{ см} \quad (13)$$

Изображение сместится влево на $b_1 - b_2 \approx 3,3 \text{ см}$.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула тонкой линзы (1)	1
2	Найдено расстояние до изображения – формула (2), (10), (11)	1
3	Построен или качественно описан ход луча в плоско-параллельной пластине	1
4	Записан закон Снеллиуса	1
5	Найдено эквивалентное смещение источника (или изображения) x в параксиальном приближении – формула (9)	1
6	Найдено эффективное расстояние до источника a_1 в первом случае – формула (10)	1
7	Найдено расстояние b_1 до изображения во первом случае – формула (11)	1
8	Найдено эффективное расстояние до источника a_2 во втором случае – формула (12)	1
9	Найдено расстояние b_2 до изображения во втором случае – формула (13)	1
10	Найдено смещение изображения – влево на 3,3 см	1
	Сумма	10